Fen-Edebiyat Fakültesi		**SINAV KAĞIDI**
Ad Soyadı:	Bölümü: Matematik	NOTU
Numarası:	Dersin Adı: Analiz IV	
İmza:	Sınav Tarihi: 28 Mart 2017	

```
Her soru eşit değerdedir.  Yalnızca 5 soruyu cevaplayınız.  Süre 90dk.
```

1. Aşağıdaki fonksiyonlar için $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ limitlerin var olup olmadıklarını inceleyiniz.

   a) $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y^2}{x^4+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ b) $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y}{x^4+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

2. $f(x,y)=\begin{cases}\frac{2xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ fonksiyonunu için $f_x(0,0)$ ve $f_y(0,0)$ kısmi türevlerini hesaplayın. f fonksiyonu $(0,0)$ noktasında sürekli midir? f fonksiyonu $(0,0)$ noktasında türetilebilir midir? Gösteriniz.

3. $f(x,y)=xg(y/x)$ fonksiyonunun $x^2f_{xx}+2xyf_{xy}+y^2f_{yy}=0$ diferansiyel denklemini gerçeklediğini gösteriniz.

4. $$\begin{aligned}u^3+xv+y&=0\\ yu+v^3-x&=0\end{aligned}$$

   denklem sisteminin $(u,v,x,y)=(1,1,0,-1)$ noktasının uygun bir komşuluğunda u ve v için x ve y cinsinden tek bir şekilde çözülebileceğini gösteriniz. Ayrıca $\frac{\partial u}{\partial x}$ ve $\frac{\partial v}{\partial x}$ türevlerini $(x,y)=(0,-1)$ noktasında hesaplayınız.

5. $\vec{r}=xi+yj+zk$ ve $r=\|\vec{r}\|$ olsun. $\text{grad}r^3=3r\vec{r}$, $\text{div}(r^3\vec{r})=6r^3$ ve $\text{curl}(3r\vec{r})=\vec{0}$ olduğunu gösterin.

6. $\lim_{x\to a} f(x)=L$ ve $\lim_{y\to b} g(y)=M$ ise $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x)g(y)=LM$ olduğunu limitin $\epsilon-\delta$ tanımını kullanarak gösteriniz.

7. $R=(x,y)\in\mathbb{R}^2:|x|\le|y|$ kapalı bölgesini çizin ve

   $$h(x,y)=\begin{cases}2xy, & (x,y)\in\mathbb{R}\\ -2xy, & (x,-y)\notin\mathbb{R}\end{cases}$$

   fonksiyonu için $h_{xy}(0,0)$ ve $h_{yx}(0,0)$ değerlerini varsa hesaplayın.

① a) $$\left|f(x,y)\right| = \left|\frac{x^2y^2}{x^4+y^2}\right| = \frac{y^2}{x^4+y^2}\cdot x^2 \leq x^2$$

çünkü $y^2/_{x^4+y^2} \leq 1$, $(x,y)\neq(0,0)$ ise,

Sıkıştırma teoremi $\Rightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} |f(x,y)| = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x^2 = 0.$

b) $$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=kx^2}} \frac{x^2kx^2}{x^4+k^2x^4} = \lim_{x\to 0}\frac{k}{1+k^2} = \frac{k}{1+k^2}$$

Limit k'ye bağlı çıktığından $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ yoktur.

② $$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=kx}} \frac{2xy}{x^2+y^2} = \frac{2k}{1+k^2}$$ yani limit yoktur, o halde

f $(0,0)$'da süreksizdir.

f $(0,0)$'da türetilemez.

Türetilebilir olsaydı sürekli olması gerekirdi.

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = 0$$

Benzer şekilde $f_y(0,0)=0$ olur.

③ $$f_x = g(y/x) + x\, g'(y/x)\frac{y}{-x^2} = g(y/x) - g'(y/x)\, y/x$$

$$f_{xy} = \cancel{g'(y/x)\,1/x} - g''(y/x)\,1/x\; y/x - \cancel{g'(y/x)\,1/x} = -g''\left(\frac{y}{x}\right)\frac{y}{x^2}$$

$$f_y = x\,g'(y/x)\,1/x = g'(y/x)$$

$$f_{yy} = g''(y/x)\,1/x$$

$$f_{xx} = \cancel{g'(y/x)\frac{y}{-x^2}} - \left(g''\left(\frac{y}{x}\right)\frac{y}{-x^2}\cdot\frac{y}{x} + \cancel{g'\left(\frac{y}{x}\right)\frac{y}{-x^2}}\right)$$

$$f_{xx} = g''\left(\frac{y}{x}\right)\cdot\frac{y^2}{x^3}$$

$$x^2f_{xx} + 2xyf_{xy} + y^2f_{yy} = g''\left(\frac{y}{x}\right)\frac{y^2}{x} - 2g''\left(\frac{y}{x}\right)\frac{y^2}{x} + g''\left(\frac{y}{x}\right)\frac{y^2}{x} = 0$$

(4) $f_1 = u^3 + xv + y, \quad f_2 = yu + v^3 - x$ olsun.

$P = (1,1,0,-1) \Rightarrow f_1(P) = f_2(P) = 0.$

$$J = \frac{\partial(f_1,f_2)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} 3u^2 & x \\ y & 3v^2 \end{vmatrix} = 9u^2v^2 - xy.$$

$J(P) = 9 - 0 = 9 \neq 0 \Rightarrow$ Tek şekilde çözülür.

$$\left.\begin{aligned} &3\frac{\partial u}{\partial x}u^2 + v + x\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \\ &y\frac{\partial u}{\partial x} + 3v^2\frac{\partial v}{\partial x} - 1 = 0 \end{aligned}\right. \xRightarrow{(x,y)=(0,-1)} \begin{aligned} &3\frac{\partial u}{\partial x} + 1 = 0 \\ &-\frac{\partial u}{\partial x} + 3\frac{\partial v}{\partial x} - 1 = 0 \end{aligned} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{3}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{2}{9}$$

(5) $r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \Rightarrow 2r\frac{\partial r}{\partial x} = 2x \Rightarrow \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}$

$\operatorname{grad} r = \frac{x}{r}i + \frac{y}{r}j + \frac{z}{r}k = \frac{\vec{r}}{r}, \quad \operatorname{div}\vec{r} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3.$

a) $\operatorname{grad} r^3 = 3r^2 \operatorname{grad} r = 3r^2\frac{\vec{r}}{r} = 3r\vec{r}.$

b) $\operatorname{div}(r^3\vec{r}) = \operatorname{grad} r^3 \cdot \vec{r} + r^3 \operatorname{div}\vec{r} = 3r\vec{r}\cdot\vec{r} + r^3 \cdot 3 = 3r r^2 + 3r^3$
$= 6r^3.$

c) $\operatorname{curl}(3r\vec{r}) = \operatorname{curl}(\operatorname{grad} r^3) = \vec{0}$ zira ikinci mertebe kısmi türevleri sürekli her $f = f(x,y,z)$ için $\operatorname{curl}\operatorname{grad} f = \vec{0}$ olur.

⑥

$$|f(x)g(y)-LM| = |(f(x)-L+L)(g(y)-M+M)-LM|$$

$$= |(f(x)-L)(g(y)-M) + M(f(x)-L) + L(g(y)-M) + \cancel{LM} - \cancel{LM}|$$

$$\leqslant |f(x)-L||g(y)-M| + M|f(x)-L| + L|g(y)-M|$$

$$\leqslant |f(x)-L| \cdot 1 + M|f(x)-L| + L|g(y)-M| \quad \text{(olmasını istiyoruz)}$$

$$= (M+1)|f(x)-L| + L|g(y)-M|$$

$$< (M+1)\frac{\epsilon}{2(M+1)} + L\frac{\epsilon}{2L} = \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \quad \text{(olmasını istiyoruz)}$$

$\epsilon > 0$ verilsin. $\exists\, \delta_1 > 0 \quad |y-b| < \delta_1 \Rightarrow |g(y)-M| < 1,$

$\exists\, \delta_2 > 0 \quad |y-b| < \delta_2 \Rightarrow |g(y)-M| < \frac{\epsilon}{2L}$

$\exists\, \delta_3 > 0 \quad |x-a| < \delta_3 \Rightarrow |f(x)-L| < \frac{\epsilon}{2(M+1)}$

Eğer $\|(x,y)-(a,b)\| = ((x-a)^2+(y-b)^2)^{1/2} < \delta = \delta_1 \wedge \delta_2 \wedge \delta_3$ ise yukarıdaki şartlar sağlanır ve $|f(x)g(y)-LM| < \epsilon$ olur.

⑦ Bakınız Nurettin Ergun ders notları, syf. 24.

$$h_{xy}(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{h_x(0,k)-h_x(0,0)}{k}$$

$(0,k) \in R \Rightarrow h_x(x,y) = 2y$, $(x,y) \in R \Rightarrow h_x(0,k) = 2k$.

$$h_x(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{h(k,0)-h(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{0-0}{k} = 0.$$

$$h_{xy}(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{2k-0}{k} = 2.$$

$$h_{yx}(0,0) = -2$$